Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014*

   Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter und sei A_s die von s abhängige Matrix

   $$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s^2 & s & -s \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte A_s in Abhängigkeit von s.
   Hinweis: Zur Kontrolle: $\det(A_s - \lambda E_3) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - s)$.

   b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist A_s diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
   Hinweis: Zur Kontrolle: Für $s = 2$ ist A_s nicht diagonalisierbar, sonst schon.

2. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*

   Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Erklärung oder eine Widerlegung.

   a) Wenn v ein Eigenvektor einer Matrix A zum Eigenwert λ ist, dann ist $2v$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 2λ.

   b) Für jede quadratische Matrix A gilt $\mathrm{Kern}(A) \subseteq \mathrm{Kern}(A^2)$.
   Hinweis: Schreiben Sie die Definition von $\mathrm{Kern}(A)$ und $\mathrm{Kern}(A^2)$ auf und überlegen Sie sich, ob aus $v \in \mathrm{Kern}(A)$ folgt, dass $v \in \mathrm{Kern}(A^2)$ gilt. Überlegen Sie sich auch, wieso A eine quadratische Matrix sein muss.

   c) Sei $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^n$ das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist A zur Einheitsmatrix E_n ähnlich.
   Hinweis: Können Sie eine 2×2 Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ finden, dessen charakertistische Polynom $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$ ist, die aber nicht ähnlich zur Einheitsmatrix E_2 ist?

   d) Wenn das Produkt AB zweier $n \times n$–Matrizen invertierbar ist, dann sind die beiden Matrizen A und B auch invertierbar.
   Hinweis: Betrachten Sie $\det(AB)$.

3. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2008*

   Es sei V der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Für jedes Polynom $p(x)$ hat das Polynom $x\,p(x+1) - x\,p(x)$ keinen höheren Grad als $p(x)$ (Wieso?). Deswegen ist die lineare Abbildung

   $$F : V \to V, \quad p(x) \mapsto x\,p(x+1) - x\,p(x),$$

   wohldefiniert.

a) Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der Basis 1, x, x^2 von V.
Hinweis: Geben Sie zuerst die Abbildung

$$F : V \to V,\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto ?$$

explizit an und bestimmen Sie damit die darstellende Matrix.

b) Ist diese Matrix (und damit die Abbildung F) diagonalisierbar?

c) Zusatzaufgabe: Geben Sie die eine Basis von Eigenvektoren von F an.
Hinweis: Finden Sie zuerst eine Basis aus Eigenvektoren für die darstellende Matrix. Mit Hilfe dieser Basis haben Sie die Aufgabe im wesentlichen schon gelöst (Wieso?).

4. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005*

a) Berechnen Sie die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

b) Ist A invertierbar?